CHAPITRE III : CALIBRES

Au second parapgraphe, nous allons étudier, sous le nom de calibres, des applications de $\phi(E)$ dans $\phi(F)$ qui auront la propriété de transformer toute fonction analytique en une fonction analytique. Leur définition comprendra deux conditions : 1) une condition de "capacitabilité" 2) une condition "d'analyticité" pour leur restriction aux fonctions s.c.s. Aussi introduisons nous au premier paragraphe une topologie métrisable compacte sur l'ensemble des fonctions s.c.s., qui nous permettra de parler d'ensemble analytique de fonctions s.c.s. Cette topologie interviendra aussi dans les chapitres ultérieurs. Enfin, les méthodes exposées ici ne semblant pas susceptibles d'extension au cas abstrait ou topologique plus général, il n'y a pas de compléments.

1.- LA TOPOLOGIE DE HAUSDORFF

Si E est un espace métrisable compact, nous désignerons désormais par $\underline{\underline{K}}(E)$ l'ensemble des parties compactes de E qui sera muni de la topologie définie de la manière suivante

1 DÉFINITION.- <u>On appelle</u> topologie de Hausdorff sur $\underline{\underline{K}}(E)$ <u>la moins fine des topologies telles qu'un ensemble de la forme</u> $\{K \in \underline{\underline{K}}(E) : K \subset A\}$ <u>soit ouvert</u> (<u>resp fermé</u>) <u>si</u> A <u>est ouvert</u> (<u>resp fermé</u>) <u>dans</u> E.

L'ensemble vide de E est un point isolé de $\underline{\underline{K}}(E)$, et une base d'ouverts pour cette topologie est constituée par les ensembles de la forme

$$\{K : K\subset U\}\cap\{K : K\cap V_1 \neq \emptyset\}\cap\ldots\cap\{K : K\cap V_n \neq \emptyset\}$$

où U, $V_1,\ldots,V_n$ sont des ouverts de E. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette topologie est séparée.

2 THÉORÈME.- La topologie de Hausdorff est métrisable compacte. De plus, si d est une distance sur E compatible avec sa topologie, la fonction ρ sur $\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{K}}(E)$ définie par

$$\rho(K,L) = \sup_{x\in E} |d(x,K)-d(x,L)|$$

est une distance sur $\underline{\underline{K}}(E)$ compatible avec la topologie de Hausdorff.

DÉMONSTRATION.- La topologie de Hausdorff étant séparée, il suffit de démontrer que la distance ρ définit une topologie compacte plus fine. Pour $K\in\underline{\underline{K}}(E)$, nous désignerons par d_K la fonction $x \to d(x,K)$ (où $d(x,K) = \sup_{y\in K} d(x,y)$): la fonction d_K étant continue, la distance ρ choisie permet d'identifier $\underline{\underline{K}}(E)$ à un sous-espace de l'ensemble $\underline{\underline{C}}(E)$ des fonctions continues sur E muni de la topologie de la convergence uniforme. Comme on a $|d_K(x)-d_K(y)|\leq d(x,y)$, l'ensemble $\underline{\underline{K}}(E)$ est borné et équicontinu dans $\underline{\underline{C}}(E)$: il est donc relativement compact d'apres le théorème d'Ascoli. Montrons que $\underline{\underline{K}}(E)$ est fermé dans $\underline{\underline{C}}(E)$: soit (d_{K_n}) une suite convergeant vers une fonction $f\in\underline{\underline{C}}(E)$; on a alors $f = d_K$ où $K = \{f = 0\}$. En effet, pour $x\in E$ fixé, on a d'une part $|f(x)-f(y)|\leq d(x,y)$ pour tout y, et donc on a $f\leq d_K$. Désignons d'autre part, pour tout n, par y_n un point de K_n tel que l'on ait $d(x,y_n) = d(x,K_n)$: quitte à extraire une sous-suite des K_n, on peut supposer que (y_n) converge vers $y\in E$. Mais, étant donnée l'équicontinuité, il est clair que y appartient à K et que $d(x,y) = f(x)$. D'où l'égalité de f et de d_K. Enfin, le fait que la topologie définie par ρ est plus fine que la topologie de Hausdorff résulte aisément des égalités suivantes, où L est un compact de E

$\{K : K\subset L\} = \{d_K : d_K \geq d_L\}$ $\{K : K\cap L \neq \emptyset\} = \{d_K : \inf(d_K \wedge d_L) = 0\}$

REMARQUES.- 1) Nous avons choisi pour distance ρ celle qui permet d'obtenir le théorème le plus rapidement. Mais, plus communément, on utilise la "distance de Hausdorff" définie par

$$\rho(K,L) = \sup \left[\sup_{x\in L} d(x,K), \sup_{x\in K} d(x,L)\right]$$

2) Voici une autre définition possible de la topologie de Hausdorff, due à CHOQUET [ ] : la famille filtrante de compacts (K_i) converge vers le compact K si, pour toute fonction continue f sur E, le maximum de f sur K_i converge vers le maximum de f sur K.

3) Voyons rapidement comment définir maintenant une "bonne" topologie sur l'ensemble $\underline{\underline{S}}(E)$ des fonctions s.c.s. sur E, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On identifie toute fonction $f\in\underline{\underline{S}}(E)$ à son sous-graphe fermé, i.e. l'ensemble $\{(x,t) : f(x)\geq t\}$, qui est compact dans $E\times\overline{\mathbb{R}}_+$, et on munit $\underline{\underline{S}}(E)$ de la topologie induite par celle de $\underline{\underline{K}}(E\times\overline{\mathbb{R}}_+)$. L'ensemble $\underline{\underline{S}}(E)$, muni de cette topologie, est métrisable compact, et $\underline{\underline{K}}(E)$ peut être identifié à un sous-espace compact de $\underline{\underline{S}}(E)$.

3 Les propriétés suivantes de la topologie de Hausdorff sont faciles à vérifier. Nous les utiliserons souvent par la suite, sans références, pour démontrer qu'un ensemble est analytique par la méthode de Kuratowski-Tarski.

1) les ensembles suivants sont compacts

$\{(x,K) : x\in K\}$ dans $E\times\underline{\underline{K}}(E)$

$\{(K,L) : K\subset L\}$ dans $\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{K}}(E)$

$\{(K,L) : K\cap L \neq \emptyset\}$ dans $\underline{\underline{K}}(E)\times\underline{\underline{K}}(E)$

2) les applications suivantes sont continues

$x \to \{x\}$ de $\underline{\underline{E}}$ dans $\underline{\underline{K}}(E)$

$(K,L) \to K \cup L$ de $\underline{\underline{K}}(E) \times \underline{\underline{K}}(E)$ dans $\underline{\underline{K}}(E)$

$K \to \pi(K)$ de $\underline{\underline{K}}(E \times F)$ dans $\underline{\underline{K}}(E)$ (π désignant la projection sur E)

$K \to \delta(K)$ de $\underline{\underline{K}}(E)$ dans $\mathbb{R}_+$ (δ désignant le diamètre associé à une distance sur E compatible avec sa topologie)

3) Si (K_n) est une suite décroissante de compacts, d'intersection K, alors (K_n) converge vers K dans $\underline{\underline{K}}(E)$

Nous allons étudier l'ensemble des compacts non dénombrables, et montrer qu'il est analytique dans $\underline{\underline{K}}(E)$. Mais avant cela, nous rappellerons quelques notions topologiques élémentaires.

4 Soit A une partie de E On dit que $x \in E$ est un <u>point de condensation</u> de A si tout voisinage de x rencontre A suivant un ensemble qui n'est pas dénombrable. Un argument simple de recouvrement (E étant à base dénombrable) montre que l'ensemble des points de A qui ne sont pas des points de condensation est au plus dénombrable. Rappelons d'autre part qu'un compact est dit <u>parfait</u> s'il n'a pas de points isolés, et il résulte du théorème de Baire que tout parfait non vide n'est pas dénombrable. Maintenant, si K est un compact quelconque, l'ensemble N de ses points de condensation est un parfait, contenu dans K, que l'on appelle le <u>noyau parfait</u> de K, et la décomposition de K en son noyau parfait N et l'ensemble dénombrable K-N est l'unique décomposition de K en un ensemble parfait et un ensemble dénombrable disjoints (théorème de Cantor-Bendixson).

Le résultat suivant est dû à Banach

5 THÉORÈME.- <u>L'ensemble des parfaits non vides de</u> E <u>est</u> $\underline{\underline{G}}_\delta$ <u>dans</u> $\underline{\underline{K}}(E)$

DÉMONSTRATION.- Nous allons montrer que l'ensemble $\underline{\underline{I}}$ des compacts non vides de E ayant au moins un point isolé est $\underline{\underline{K}}_\sigma$ dans $\underline{\underline{K}}(E)$. Soit (U_n) une base dénombrable d'ouverts de E. On a l'équivalence suivante, en symboles logiques,

$$K \in \underline{\underline{I}} \iff \exists n \ \exists x \quad x \in K \quad \text{et} \quad x \in U_n \quad \text{et} \quad K \subset \{x\} \cup U_n^c$$

Il résulte aisément des propriétés de la topologie de Hausdorff que $\{(x,K) : K \subset \{x\} \cup U_n^c\}$, n fixé, est compact dans $E \times \underline{\underline{K}}(E)$, et donc I est $[P(\underline{\underline{K}} \cap \underline{\underline{G}} \cap \underline{\underline{K}})]_\sigma = [P(\underline{\underline{K}}_\sigma)]_\sigma = \underline{\underline{K}}_\sigma$.

6 COROLLAIRE.- <u>L'ensemble des compacts non-dénombrables de</u> E <u>est analytique dans</u> $\underline{\underline{K}}(E)$.

DÉMONSTRATION.- Désignons par $\underline{\underline{N}}$ l'ensemble des compacts non dénombrables, et par $\underline{\underline{P}}$ l'ensemble des parfaits non vides. Etant donné le théorème de Cantor-Bendixson, on a

$$K \in \underline{\underline{N}} \iff \exists L \quad L \in \underline{\underline{P}} \quad \text{et} \quad L \subset K$$

et donc $\underline{\underline{N}}$ est $P[\underline{\underline{G}}_\delta \cap \underline{\underline{K}}] = P[\underline{\underline{G}}_\delta] = \underline{\underline{A}}$.

REMARQUES.- 1) Hurewicz a montré que l'ensemble des compacts non-dénombrables n'est pas borélien dans $\underline{\underline{K}}([0,1])$: c'est un des exemples les plus simples d'ensemble analytique qui ne soit pas borélien.

2) dans le même ordre d'idées, Kuratowski et Marczewski ont montré que l'ensemble des compacts contenus dans les rationnels de [0,1] n'est pas analytique, mais est le complémentaire d'un ensemble analytique dans $\underline{\underline{K}}([0,1])$

3) il est facile de voir que, si A est $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans E, l'ensemble $\{K : K \subset A\}$ est $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans $\underline{\underline{K}}(E)$. Par contre, si A est $\underline{\underline{K}}_\sigma$, cet ensemble peut ne pas être analytique dans $\underline{\underline{K}}(E)$: il suffit de prendre pour A l'ensemble des rationnels de [0,1].

2.- CALIBRES

Nous nous bornerons à étudier des opérations transformant des ensembles en des fonctions : le cas général (transformations de fonctions en fonctions) est un peu plus compliqué, sans être très utile pour les applications.

7 DÉFINITION.- *Un calibre de* E *dans* F *est une application* p *de* $\phi(E)$ *dans* $\phi(F)$ *satisfaisant aux conditions suivantes*

a) *si* A *et* B *sont deux éléments de* $\phi(E)$ *tels que* $A \subset B$, *on a* $p(y,A) \leq p(y,B)$ *pour tout* $y \in F$, *où* $p(y,A)$ *désigne la valeur de la fonction* $p(A)$ *au point* y

b) *si* A *est une partie analytique d'un produit* $E \times G$, *on a*

$$p(y,\pi(A)) = \sup p(y,\pi(K)),\ K \in \underline{\underline{K}}(E \times G),\ K \subset A$$

où π *désigne la projection de* $E \times G$ *sur* E

c) *la fonction* $(y,K) \rightarrow p(y,K)$ *est analytique sur* $F \times \underline{\underline{K}}(E)$.

Il est peu probable que le produit de composition de deux calibres (s'il est défini) soit encore un calibre. On a cependant

8 THÉORÈME.- *Soient* p *un calibre de* E *dans* F, *et* π *la projection d'un produit* $E \times G$ *sur* E. *L'application composée* $p \circ \pi$ *est alors un calibre de* $E \times G$ *dans* F.

DÉMONSTRATION.- La condition a) est évidemment vérifiée, et la condition b) aussi puisque la composée de deux projections est encore une projection. Enfin, l'application $(y,K) \rightarrow (y,\pi(K))$ de $F \times \underline{\underline{K}}(E \times G)$ dans $F \times \underline{\underline{K}}(E)$ étant continue, on vérifie aisément que la fonction $(y,K) \rightarrow p(y,\pi(K))$ est analytique sur $F \times \underline{\underline{K}}(E \times G)$.

Nous avons vu au chapitre I que toute fonction analytique est la projection de la limite d'une suite décroissante de fonctions s.c.i., et, qu'en particulier, tout ensemble analytique est la projection d'un ensemble $\underline{\underline{G}}_\delta$. Etant donné le résultat précédent, on peut donc se contenter de vérifier la condition b) du n.7 pour les parties $\underline{\underline{G}}_\delta$ d'un produit.

Voici le théorème qui légitime l'introduction des calibres

9 THÉORÈME.- Soit p un calibre de E dans F. Si A est analytique dans E, la fonction p(A) est analytique sur F.

DÉMONSTRATION.- D'après ce qui précède, on peut supposer que A est $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans E : l'ensemble $\underline{\underline{K}}(A)$ des compacts contenus dans A est alors $\underline{\underline{G}}_\delta$ et donc analytique dans $\underline{\underline{K}}(E)$. Et la fonction $y \to p(y,A)$, projection sur F de la fonction analytique $(y,K) \to p(y,K).1_{\underline{\underline{K}}(A)}$, est analytique.

Avant de voir quelques applications, nous donnerons encore deux théorèmes d'extension de calibres.

10 THÉORÈME.- Soient G un espace et p un calibre de E dans F. Posons, pour toute partie A de ExG et tout $(y,z)\in F\times G$,

$$\overline{p}[(y,z),A] = p(y,A(z))$$

où A(z) est la coupe de A suivant z. L'application $\overline{p}$ de ϕ(ExG) dans ϕ(FxG) ainsi définie est un calibre de ExG dans FxG.

DÉMONSTRATION.- La condition a) du n.7 est évidemment satisfaite. Vérifions b). Soient H un espace auxiliaire, A une partie analytique dans (ExG)xH, et désignons par $\overline{\pi}$ (resp π) la projection de ExGxH (resp ExH) sur ExG (resp E) : on a alors $\pi[A(z)] = [\overline{\pi}(A)](z)$ et $\overline{p}[(y,z),\overline{\pi}(A)] = \sup p(y,\pi(K))$, $K\in\underline{\underline{K}}(E\times H)$, $K\subset A(z)$. Identifions un compact K de ExH contenu dans A(z) au compact Kx{z} de ExGxH : il est alors clair que $\bar{p}[(y,z),\bar{\pi}(A)] = \sup \bar{p}[(y,z),\bar{\pi}(K)]$, $K \in \underline{\underline{K}}(ExGxH)$, $K \subset A$. Vérifions enfin la condition c). Pour tout $t \geq 0$, on a les équivalences suivantes, en symboles logiques,

$$\bar{p}[(y,z),K] \geq t \iff \exists L \in \underline{\underline{K}}(E) \quad p(y,L) \geq t \quad \text{et} \quad L \subset K(z)$$

$$L \subset K(z) \iff Lx\{z\} \subset K$$

L'ensemble $\{(z,K,L) : L \subset K(z)\}$ est donc un compact de $Gx\underline{\underline{K}}(ExG)x\underline{\underline{K}}(E)$, et l'ensemble $\{(y,L) : p(y,L) \geq t\}$ est analytique dans $Fx\underline{\underline{K}}(E)$ par hypothèse : l'ensemble $\{[(y,z),K] : \bar{p}[(y,z),K] \geq t\}$, qui est $P(\underline{\underline{K}} \cap \underline{\underline{A}})$, est aussi analytique. D'où l'analyticité de la fonction $\bar{p}(.,.)$ sur $FxGx\underline{\underline{K}}(ExG)$.

REMARQUE.- Si la fonction $p(.,.)$ est de plus s.c.s. sur $Fx\underline{\underline{K}}(E)$, la fonction $\bar{p}(.,.)$ est aussi s.c.s. sur $FxGx\underline{\underline{K}}(ExG)$, car l'ensemble $\{[(y,z),K] : \bar{p}[(y,z),K] \geq t\}$ est alors $P(\underline{\underline{K}} \cap \underline{\underline{K}}) = \underline{\underline{K}}$ pour tout $t \geq 0$.

11 COROLLAIRE.- <u>Soit</u> p <u>un calibre de</u> E <u>dans</u> F. <u>Posons</u>, <u>pour toute partie</u> A <u>de</u> ExF <u>et tout</u> $y \in F$,

$$\bar{p}(y,A) = p(y,A(y))$$

<u>L'application</u> $\bar{p}$ <u>ainsi définie est un calibre de</u> ExF <u>dans</u> F.

DÉMONSTRATION.- Faisons G = F dans le théorème précédent, et identifions F à la diagonale de FxF : la fonction $\bar{p}(A)$ est alors la restriction à F de la fonction $\bar{p}(A)$ définie ci-dessus. Le corollaire est alors évident.

12 APPLICATIONS.- Nous dirons, pour abréger, qu'un calibre p de E dans F est <u>simple</u> si p(A) est une fonction constante pour tout $A \in \phi(E)$ Autrement dit, un calibre simple p sur E est une fonction sur $\phi(E)$, croissante, et satisfaisant les deux conditions

i) si A est analytique dans un produit ExG, alors

$$p[\pi(A)] = \sup p[\pi(K)],\ K\in\underline{\underline{K}}(E\times G),\ K\subset A$$

ii) la restriction de p à $\underline{\underline{K}}(E)$ est une fonction analytique.

Nous allons voir trois exemples de calibres simples, auxquels nous appliquerons le procédé d'extension du corollaire précédent

1) Soit I une capacité sur E : alors I est un calibre simple. La condition i) a été vérifiée lors de la démonstration du théorème de capacitabilité ; mais, il n'est pas nécessaire de se replonger dans la démonstration : il suffit de remarquer que la composée $I\circ\pi$ est une capacité, et d'appliquer le théorème de capacitabilité à cette capacité. La condition ii) résulte du fait que I est continue à droite sur $\underline{\underline{K}}(E)$(cf le n.14 du chapitre II), et donc s.c.s. pour la topologie de Hausdorff. En appliquant alors le théorème 9 à l'extension de I, on obtient : si A est analytique dans un produit ExF, la fonction $y \to I[A(y)]$ est analytique sur F.

2) Soit λ une mesure sur E, et soit B un borélien de ExF : on sait, d'après le théorème de Fubini, que la fonction $y \to \lambda[B(y)]$ est borélienne, et donc mesurable. Mais supposons maintenant que la mesure λ ne soit pas σ-finie (ce qui est le cas pour les mesures de Hausdorff) : on ne peut plus alors appliquer le théorème de Fubini. Nous verrons cependant au chapitre VI que $y \to \lambda[A(y)]$ est analytique[1] si A est analytique dans ExF. Pour le moment, nous nous bornerons à démontrer ce résultat pour la plus simple des mesures de Hausdorff : la mesure de comptage des points M^1 sur E définie par $M^1(A)$ = le nombre d'éléments de A si A est fini, et $M^1(A) = +\infty$ si A est infini. La mesure M^1 est un calibre simple : elle est

---

1) si λ est une mesure de Hausdorff

croissante et satisfait la condition i) de manière évidente. D'autre part, on vérifie aisément que, pour n fixé, l'ensemble $\{K \in \underline{\underline{K}}(E) : M^1(K) > n\}$ est ouvert : la restriction de M^1 à $\underline{\underline{K}}(E)$ est ainsi s.c.i., et donc analytique. L'application du théorème 9 à l'extension de M^1 entraine alors que, pour A analytique dans ExF, la fonction $y \to M^1[A(y)]$ est analytique.

3) Les mesures de Hausdorff n'étant pas σ-finies, un autre problème se pose : quelle est la nature de l'ensemble des y tels que la coupe A(y) de l'ensemble analytique A ne soit pas σ-finie ? Examinons ici le cas particulier de la mesure de comptage des points : un ensemble n'est pas σ-fini si et seulement s'il n'est pas dénombrable. Posons, pour toute partie A de E, I(A) = 0 si A est dénombrable et I(A) = 1 sinon. Nous pourrons affirmer que, pour A analytique dans ExF, l'ensemble des y tels que A(y) ne soit pas dénombrable est analytique dans F si nous prouvons que I est un calibre simple : la fonction I est évidemment croissante, et satisfait la condition ii) d'après le n.6; nous démontrerons au chapitre V que la condition i) est également verifiée.